Semana 14

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 1 a 9 de la Guía 4. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Esta semana comenzaremos a estudiar la estructura de los endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita.

Autovalores y autovectores

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ (notar que λ es un elemento del cuerpo considerado) es un *autovalor* de A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Al vector v lo llamamos *autovector asociado a* λ. Finalmente, definimos el *autoespacio asociado a* λ como

$$\mathcal{S}_\lambda := \{v \in \mathbb{K}^n : Av = \lambda v\} = nul(A - \lambda I).$$

La siguiente propiedad la vamos a usar para obtener los autovalores de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Proposición 1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Entonces, son equivalentes:*

i) $\lambda \in \mathbb{K}$ *es autovalor de* A,

ii) $nul(A - \lambda I) \neq \{0\}$,

iii) $rg(A - \lambda I) < n$,

iv) $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dem. $i) \Rightarrow ii)$: Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A entonces existe un vector no nulo $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$. Entonces,

$$(A - \lambda I)v = Av - \lambda v = 0.$$

Por lo tanto $v \in nul(A - \lambda I)$ y como $v \neq 0$, tenemos que $nul(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Si $nul(A - \lambda I) \neq \{0\}$, entonces $\dim(nul(A - \lambda I)) > 0$. Entonces, por el Teorema de la dimensión, tenemos que

$$rg(A - \lambda I) = \dim(col(A - \lambda I)) = n - \dim(nul(A - \lambda I)) < n.$$

$iii) \Rightarrow iv)$: Como $A - \lambda I \in \mathbb{K}^{n\times n}$, si $rg(A-\lambda I) < n$, entonces $A - \lambda I$ no es inversible y por lo tanto $\det(A - \lambda I) = 0$.

$iv) \Rightarrow i)$: Si $\det(A - \lambda I) = 0$, entonces la matriz $A - \lambda I \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no es inversible. Por lo tanto $nul(A - \lambda I) \neq \{0\}$ y existe $v \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)v = 0$. Entonces $Av = \lambda v$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A.

□

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Llamamos *polinomio característico* de A a

$$p_A(\lambda) := det(A - \lambda I) \in \mathbb{K}_n[\lambda].$$

A partir de la Proposición 1 podemos ver que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A si y sólo si $\lambda \in \mathbb{K}$ es una raíz de p_A.

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A entonces:

- La *multiplicidad algebraica* de λ es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico y se denota $m_a(\lambda)$.
- La *multiplicidad geométrica* de λ es la dimensión del autoespacio asociado de λ y se denota $m_g(\lambda)$. Es decir, $m_g(\lambda) := \dim(nul(A - \lambda I))$.

Recordar que siempre tenemos que

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n, \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K} \text{ auovalor de } A.$$

Las siguientes son algunas propiedades de autovalores y autovectores a tener en cuenta. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces:

- $\lambda = 0$ es autovalor de A si y sólo si A es no inversible (o singular).

  De hecho, $\lambda = 0$ es autovalor de A si y sólo si $\lambda = 0$ es una raíz de $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$. Es decir,
  $$\det(A) = \det(A - 0I) = p_A(0) = 0$$
  si y sólo si A es inversible (o singular).

- Si $rg(A) = k < n$ entonces $\lambda = 0$ es autovalor de A con multiplicidad geométrica $n - k$.

  De hecho, por la Proposición 1, como $rg(A) = rg(A - 0I) = k < n$ entonces $\lambda = 0$ es autovalor de A. Entonces, por el Teorema de la dimensión,
  $$m_g(\lambda = 0) = \dim(nul(A - 0I)) = \dim(nul(A)) = n - rg(A) = n - k.$$

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A entonces:

- $r\lambda$ es autovalor de rA para todo $r \in \mathbb{K}$.
- λ^k es autovalor de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.
- si existe A^{-1} entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}.

De hecho, si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A entonces existe $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v. \tag{1}$$

Entonces, multplicando la ecuación (1) a ambos lados por $r \in \mathbb{K}$. Tenemos que

$$(rA)v = (r\lambda)v.$$

Entonces $r\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de rA con el mismo autovector asociado.

Por otra parte, multiplicando la ecuación (1) a ambos lados por A. Tenemos que

$$A^2v = AAv = A\lambda v = \lambda Av = \lambda\lambda v = \lambda^2 v.$$

Entonces λ^2 es autovalor de A^2 con el mismo autovector asociado.

Vamos a probar la propiedad para todo $k \in \mathbb{N}$ por inducción: supongamos que para $k = n \in \mathbb{N}$ vale que $A^n v = \lambda^n v$ (HI). Entonces, multiplicamos esa ecuación a ambos lados por A y tenemos que

$$A^{n+1}v = AA^n v = A\lambda^n v = \lambda^n Av = \lambda^n \lambda v = \lambda^{n+1}v.$$

Entonces, a partir de la hipótesis inductiva deducimos la validez de la propiedad para $k = n+1$. Por lo tanto, por inducción, λ^k es autovalor de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$ con el mismo autovector asociado.

Finalmente, si existe A^{-1} entonces A es inversible y por lo que vimos arriba $\lambda \neq 0$. Entonces, multiplicando la ecuación (1) a ambos lados por A^{-1}. Tenemos que

$$v = A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v = \lambda A^{-1}v.$$

Entonces, multiplicando la ecuación anterior por λ^{-1} tenemos que

$$\lambda^{-1}v = \lambda^{-1}\lambda A^{-1}v = A^{-1}v.$$

Por lo tanto λ^{-1} es autovalor de A^{-1} con el mismo autovector asociado.

A continuación veremos un ejemplo de cálculo de autovectores y autovalores. Antes recordemos el siguiente resultado:

Teorema de Gauss: Sea

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}_n[x]$$

es decir un polinomio con coeficientes enteros con a_0 y a_n no nulos. Entonces, si $\lambda := \frac{p}{q}$ es una raíz racional de dicho polinomio (donde $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible o que no se puede simplificar) es porque p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

Por ejemplo, consideremos el polinomio

$$r(x) = 4x^4 - x^2 - 6x + 3 \in \mathbb{Z}_4[x].$$

Por el Teorema de Gauss, si r tiene alguna raíz racional de la forma $\lambda = \frac{p}{q}$, entonces los posibles p serían: $1, -1, 3, -3$ (es decir todos los divisores de $a_0 = 3$) y los posibles q serían, $1, -1, 2, -2, 4, -4$ (es decir todos los divisores de $a_4 = 4$). Es decir, si r tiene alguna raíz racional λ, no queda otra que:

$$\lambda = \frac{p}{q} \in \{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\}.$$

Haciendo la cuenta (es decir evaluando r en los valores de arriba y viendo si se anula), tenemos que 1 y $\frac{1}{2}$ son raíces de r (no son las únicas, pero sí son todas las raíces racionales de r).

Por ejemplo, si ahora consideramos el polinomio

$$r(x) = x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

Por el Teorema de Gauss, si r tiene alguna raíz racional de la forma $\lambda = \frac{p}{q}$, entonces los posibles p serían: $1, -1, 2, -2$ (es decir todos los divisores de $a_0 = 2$) y los posibles q serían, $1, -1$ (es decir todos los divisores de $a_3 = 1$). Es decir, si r tiene alguna raíz racional λ, no queda otra que:

$$\lambda = \frac{p}{q} \in \{1, -1, 2, -2\}.$$

Si evaluamos el polinomio r en los valores de arriba vemos que nunca se anula, por lo tanto, podemos concluir que r no tiene ninguna raíz racional.

Supongamos ahora que tenemos una matriz $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ (con coeficientes enteros), entonces el polinomio característico de A es mónico (es decir $a_n = 1$, meditar por qué) y tiene la forma

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{Z}_n[\lambda].$$

Por el Teorema de Gauss, si $\lambda = \frac{p}{q}$ es una raíz racional de p_A entonces los valores posibles de q son 1 y -1 (pues $a_n = 1$) y los posibles valores de p son los divisores de a_0. Observar además que

$$a_0 = p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A).$$

Por lo tanto, si $p_A \in \mathbb{Z}_n[\lambda]$ tiene alguna raíz racional, entonces sólo puede ser algún divisor entero del $\det(A)$.

Ejercicio 4: Encontrar los autovalores de la siguiente matriz, sus multiplicidades algebraicas y geométricas y tantos autovectores linealmente independientes como sea posible.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dem. Primero, notar que (hacer la cuenta) $\det(A_1) = -18$.

Ahora, calculemos el polinomio característico de A_1:

$$p_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -3 \\ 20 & 3-\lambda & 10 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 18.$$

Por el Teorema de Gauss, si p_A tiena alguna raíz racional λ, entonces sólo puede ser algún divisor entero del $\det(A_1) = -18$. En ese caso, las posibles raíces racionales podrían ser

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}.$$

Haciendo la cuenta (es decir evaluando p_{A_1} en los valores de arriba) se puede ver que tuvimos suerte y que $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 3$ son raíces de A_1. Además, como $-18 = \det(A_1) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -6 \cdot \lambda_3$, tenemos que $\lambda_3 = 3$.

Por lo tanto, los autovalores de A_1 son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda = -2) = 1$ y $\lambda_{2,3} = 3$ con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda = 3) = 2$.

Para obtener los autoespacios asociados, calculamos:

$$\mathcal{S}_{\lambda=2} = nul(A_1 - (-2)I) = nul(\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 20 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}) = nul(\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 25 & -50 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda=3} = nul(A_1 - 3I) = nul(\begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 20 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}) = nul(\begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\}.$$

Por lo tanto, la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = -2$ es $m_g(\lambda = -2) = 1$ (lo cual es obvio porque $\lambda = -2$ es un autovalor simple) y la multiplicidad geométrica de $\lambda_{2,3} = 3$ es $m_g(\lambda = 3) = 1$.

Finalmente, si $v_1 \in gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\} \setminus \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ entonces v_1 es un autovector asociado a $\lambda_1 = -2$ y si $v_2 \in gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\} \setminus \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ entonces v_2 es un autovector asociado a $\lambda_{2,3} = 3$. Por lo tanto, siempre podemos encontrar a lo sumo 2 autovectores de A_1 que sean linealmente independientes.

$\square$

Diagonalización

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diremos que A es *diagonalizable* si existen $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $\Lambda \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonal tales que

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A.

De hecho, supongamos que A es diagonalizable, entonces existen $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $\Lambda \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonal tales que

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

Sea $P = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ \ v_n]$ donde $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ (el conjunto de las columnas de P) es una base de $\mathbb{K}^n$, pues P es inversible. Supongamos que $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (no necesariamente todos distintos). Entonces, como $A = P\Lambda P^{-1}$, multiplicando a izquierda por P, se sigue que

$$AP = P\Lambda.$$

Por lo tanto, como

$$AP = A[v_1 \ v_2 \ \cdots v_n] = [Av_1 \ Av_2 \ \cdots \ Av_n] \text{ y}$$

$$P\Lambda = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \ diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \cdots \ \lambda_n v_n].$$

Tenemos que

$$Av_i = \lambda_i v_i,$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$. Como $v_i \neq 0$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, v_i es un autovector de A para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A.

Recíprocamente, si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A. Entonces, existen $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (no necesariamente distintos entre sí) tales que

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea $P := [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$ y $\Lambda := diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ entonces P es inversible pues sus columnas forman un base de $\mathbb{K}^n$ y además

$$AP = [Av_1 \ Av_2 \ \cdots \ Av_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \cdots \ \lambda_n v_n] = P\Lambda.$$

Entonces

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

y por lo tanto A resulta diagonalizable.

La siguiente propiedad (demostrada en la clase teórica) nos permite determinar si una matriz es diagonalizable:

> A es diagonalizable si y sólo si las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada autovalor distinto de A coinciden.
> En particular, si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tiene n autovalores distintos, entonces A es diagonalizable.

El siguiente ejercicio (muy similar al **Ejercicio 1**) es un ejemplo de cálculo de autovectores y autovalores y de diagonalización de una matriz de 3×3.

Ejercicio : Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Hallar los autovalores y autoespacios de A.

b) Verificar que los autovectores de A forman una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$, $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, y comprobar, que

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

donde Λ es una matriz diagonal.

Dem. $a)$: Calculamos el polinomio característico de A :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)]$$
$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Los autovalores de A son las raíces de p_A y son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.
Para obtener los autoespacios asociados, calculamos:

$$\mathcal{S}_{\lambda=1} = nul(A - I) = nul(\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda=2} = nul(A - 2I) = nul(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}) = nul(\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda=3} = nul(A - 3I) = nul(\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}) = nul(\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}.$$

$b)$: Si tomamos $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}$. Entonces, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ (verificar que son 3 vectores lineamente independientes) compuesta por autovectores de A. Como obtuvimos una base de autovectores de A, tenemos que A es diagonalizable.

$c)$: Recordar que $\mathcal{E} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Claramente,

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = P.$$

Por lo tanto $P^{-1} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$

Si $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, se puede comprobar haciendo la cuenta que $A = P\Lambda P^{-1}$.

Si no queremos hacer la cuenta, podemos pensar lo siguiente: llamemos $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a la transformación lineal $T_A(x) = Ax$. Entonces, claramente $[T_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A$. Por otra parte, como

$$A(\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}) = 2(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}) \text{ y } A(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}) = 3(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\ [T_A(\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ [T_A(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ [T_A(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ ] \\
&= [\ [A(\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ [A(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ [A(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ ] \\
&= [\ [\ \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}]^{\mathcal{B}}\ [2(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ [3(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix})]^{\mathcal{B}}\ ] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \Lambda.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$A = [T_A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\ [T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = P\Lambda P^{-1}.$$

□

Ejercicio 3: Explicar por qué las siguientes matrices no son diagonalizables en $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}; \qquad \rho \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dem. Calculamos el polinomio característico de la matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$p(\mu) = \det(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \mu I) = \det(\begin{bmatrix} \lambda - \mu & 1 \\ 0 & \lambda - \mu \end{bmatrix}) = (\lambda - \mu)^2.$$

Los autovalores de la matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, son las raíces del polinomio característico. En este caso, las raíces son $\mu_1 = \mu_2 = \lambda$. Veamos la dimensión del autoespacio asociado al autovalor $\mu_{1,2} = \lambda$. Para eso, calculamos

$$nul(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \lambda I) = nul(\begin{bmatrix} \lambda - \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - \lambda \end{bmatrix}) = nul(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Entonces, la multiplicidad geométrica asociada al autovalor λ es 1, mientras que la multiplicidad algebraica asociada al autovalor λ era 2, es decir $m_g(\mu = \lambda) < m_a(\mu = \lambda)$. Por lo tanto, la matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ nunca es diagonalizable.

Ahora, calculamos el polinomio característico de la matriz $\rho \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ con $\rho > 0$ y $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(\rho \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \rho\cos\theta - \lambda & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta - \lambda \end{bmatrix} \\
&= (\rho\cos\theta - \lambda)(\rho\cos\theta - \lambda) + \rho^2 \sin\theta^2 = \rho^2\cos\theta^2 - 2\rho\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \rho^2\sin\theta^2 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda\rho\cos\theta + \rho^2(\cos\theta^2 + \sin\theta^2) = \lambda^2 - 2\lambda\rho\cos\theta + \rho^2.
\end{aligned}
$$

Los autovalores de la matriz $\rho \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ con $\rho > 0$ y $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ son las raíces en $\mathbb{R}$ (estamos considerando cuerpo real) del polinomio característico. Es decir, buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda 2\rho\cos\theta + \rho^2 = 0$. Entonces, despejando y recordando que $\rho > 0$, nos queda que

$$
\lambda_{1,2} = \frac{2\rho\cos\theta \pm \sqrt{4\rho^2\cos\theta^2 - 4\rho^2}}{2} = \frac{2\rho\cos\theta \pm 2\rho\sqrt{\cos\theta^2 - 1}}{2}.
$$

Observar que como $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ entonces $\cos\theta^2 < 1$. Por lo tanto, $\cos\theta^2 - 1 < 0$ y entonces $\sqrt{\cos\theta^2 - 1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Por lo tanto, como $\rho > 0$, tenemos que

$$
\lambda_{1,2} = \rho(\cos\theta \pm i\sqrt{|\cos\theta^2 - 1|}) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},
$$

entonces la matriz $\rho \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ con $\rho > 0$ y $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ no tiene autovalores (en $\mathbb{R}$) y concluimos que dicha matriz no es diagonalizable. □

Las mismas nociones de autovalores, autovectores y diagonalización que vimos para matrices se pueden definir para transformaciones lineales.

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. El escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de T si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{V} \setminus \{0_{\mathbb{V}}\}$ tal que

$$
T(v) = \lambda v.
$$

Al vector v lo llamamos *autovector asociado a* λ y definimos el *autoespacio asociado a* λ como

$$
\mathcal{S}_\lambda := \{v \in \mathbb{V} : T(v) = \lambda v\} = Nu(T - \lambda I).
$$

Finalmente, diremos que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es diagonalizable si existe una base de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de T.

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, se define el *polinomio característico de T* como

$$p_T(\lambda) := \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I),$$

donde $\mathcal{B}$ es cualquier base de $\mathbb{V}$.

Observar que si $\mathcal{B}'$ es otra base de $\mathbb{V}$, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = (M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}\ [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\det([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} - \lambda I) &= \det((M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}\ [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} - \lambda (M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}) = \det((M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}) \\
&= \det((M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1})\ \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I)\ \det(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}) = \det(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}\ \det(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})\ \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I) \\
&= \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio característico de T está bien definido (no depende de la base $\mathcal{B}$ elegida).

Entonces, de la misma manera que vimos para matrices tenemos que:

> Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, entonces $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T si y sólo si $\lambda \in \mathbb{K}$ es una raíz de p_T.

Veamos un ejemplo para aplicar todos estos conceptos a transformaciones lineales:

Ejercicio de examen: Dada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ definida por $T(v_1) = 7v_1 + 2v_2$ y $T(v_2) = -4v_1 + v_2$, con $\mathcal{B} = \{v_1; v_2\}$ una base de $\mathbb{V}$. Entonces

a) Hallar, si existe, una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{V}$ tal que $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ sea diagonal.

b) Calcular $[T^k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dem. *a)* : Veamos si T es diagonalizable. Para eso elijamos una base conveniente y calculemos el polinomio característico de T. Si tomamos la base $\mathcal{B}$, entonces, por un lado

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Y tenemos que

$$p_T(\lambda) = \det([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}) = (7-\lambda)(1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 8\lambda + 15.$$

Cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 5$.

Calculemos los autoespacios asociados:

$$nul([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - 3I) = nul(\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Por lo tanto,
$$S_{\lambda=3} = Nu(T - 3I_{\mathbb{V}}) = gen\{v_1 + v_2\}.$$

$$nul([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - 5I) = nul(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Por lo tanto,
$$S_{\lambda=5} = Nu(T - 5I_{\mathbb{V}}) = gen\{2v_1 + v_2\}.$$

Si tomamos $\mathcal{C} := \{v_1 + v_2; 2v_1 + v_2\}$ que es una base (verificarlo) entonces, como $T(v_1 + v_2) = 3(v_1 + v_2)$ y $T(2v_1 + v_2) = 5(2v_1 + v_2)$, tenemos que

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

y T resulta diagonalizable.

b): Vimos en la **Guía 2** que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$[T^k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^k.$$

Por otra parte, observar que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de $\mathbb{V}$ entonces

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \ [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Llamemos $P := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $P^{-1} := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto,

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Observar que

$$\begin{aligned} ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^2 &= P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^{-1} = P \ (\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix})^2 \ P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

A partir de la observación anterior, vamos a probar por inducción que

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^k = P \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix} P^{-1}, \qquad (2)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si $k = 1$, claramente (2) vale.

Supongamos que para $k = n \in \mathbb{N}$ vale que $([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^n = P \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} P^{-1}$ (HI).

Entonces, usando la HI,

$$\begin{aligned}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^{n+1} &= [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^n = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\ (P \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} P^{-1}) \\ &= P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 5^{n+1} \end{bmatrix} P^{-1}.\end{aligned}$$

Como a partir de la validez de la ecuación (2) para $k = n$ deducimos la validez de dicha ecuación para $k = n+1$, por inducción, se sigue que,

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^k = P \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})^k = \begin{bmatrix} -3^k + 2 \cdot 5^k & 2 \cdot (3^k - 5^k) \\ -3^k + 5^k & 2 \cdot 3^k - 5^k \end{bmatrix}.$$

El siguiente ejercicio demuestra que toda simetría y todo proyector es diagonalizable, esto ya lo habíamos notado en la **Proposición 1** de la **Semana 7**. Vamos a reescribir lo que hicimos para adaptarlo a la notación de la Guía 4.

Ejercicio 5: Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $n > 1$. Demostrar que

a) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) \setminus \{I_{\mathbb{V}}\}$ es una simetría (es decir, $S^2 = I_{\mathbb{V}}$), existen $k \in \mathbb{N}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tales que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{bmatrix},$$

con I_k la matriz identidad de $k \times k$ e I_{n-k} la matriz identidad de $n-k \times n-k$.

b) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) \setminus \{0_{\mathbb{V}}, I_{\mathbb{V}}\}$ es una proyección (es decir, $T^2 = T$), existen $k \in \mathbb{N}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ tales que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con I_k la matriz identidad de $k \times k$.

Dem. *a)* : Como S cumple que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, en el **Ejercicio 2.27 e)** (ver **Semana 7**) vimos que S es una simetría y probamos que

$$\mathbb{V} = Nu(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus Nu(S + I_{\mathbb{V}})$$

(en este caso el símbolo $\oplus$ denota suma directa, no necesariamente ortogonal).

Sea $k := \dim(Nu(S - I_{\mathbb{V}}))$ (como $S \neq I_{\mathbb{V}}$ tenemos que $k < n$).

Si $k = 0$, entonces $Nu(S - I_{\mathbb{V}}) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y tenemos que $\mathbb{V} = Nu(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus Nu(S + I_{\mathbb{V}}) = Nu(S + I_{\mathbb{V}})$. Por lo tanto $(S + I_{\mathbb{V}})v = 0_{\mathbb{V}}$, para todo $v \in \mathbb{V}$ y entonces se sigue $S = -I_{\mathbb{V}}$. En ese caso, tomando cualquier base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ se sigue que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = -I_n.$$

Si $k \geq 1$, sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ una base de $Nu(S - I_{\mathbb{V}})$. Entonces,

$$S(v_i) = v_i,$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, k$. Por otra parte, como $\mathbb{V} = Nu(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus Nu(S + I_{\mathbb{V}})$, tenemos que

$$\dim(Nu(S + I_{\mathbb{V}})) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(Nu(S - I_{\mathbb{V}})) = n - k \geq 1.$$

Sea $\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ una base de $Nu(S + I_{\mathbb{V}})$. Entonces,

$$S(v_i) = -v_i$$

para todo $i = k + 1, \cdots, n$.

Sea $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ (por qué?). Recordemos además que $[v_i]^{\mathcal{B}} = e_i$, donde e_i es el vector i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{C}^n$, es decir el vector de $\mathbb{C}^n$ con todas componentes nulas excepto en el lugar i donde vale 1. Por ejemplo,

$$[v_1]^{\mathcal{B}} = [1\ 0 \cdots\ 0]^T = e_1.$$

Entonces, por definición de $[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} &= [\ [S(v_1)]^{\mathcal{B}}\ [S(v_2)]^{\mathcal{B}} \cdots\ [S(v_k)]^{\mathcal{B}}\ [S(v_{k+1})]^{\mathcal{B}}\ \cdots\ [S(v_n)]^{\mathcal{B}}\ ] \\
&= [\ [v_1]^{\mathcal{B}}\ [v_2]^{\mathcal{B}}\ \cdots\ [v_k]^{\mathcal{B}}\ [-v_{k+1}]^{\mathcal{B}}\ \cdots\ [-v_n]^{\mathcal{B}}\ ] \\
&= [\ e_1\ e_2\ \cdots\ e_k\ - e_{k+1}\ \cdots\ - e_n] \\
&= \begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & -I_{n-k\times n-k} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

b) : Como T cumple que $T^2 = T$, en el **Ejercicio 2.27 a)** (ver **Semana 7**) vimos que T es la proyección sobre $Im(T)$ en la dirección de $Nu(T)$. Por otra parte, en el **Ejercicio 2.24 a)** (ver **Semana 7**), probamos que

$$\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T)$$

(en este caso el símbolo $\oplus$ denota suma directa, no necesariamente ortogonal).

Sea $k := \dim(Im(T))$ (como $T \neq I_{\mathbb{V}}$ y $T \neq 0_{\mathbb{V}}$ entonces $1 \leq k < n$) y sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ una base de $Im(T)$. Entonces, como T es un proyector y $v_i \in Im(T)$, para todo $i = 1, 2, \cdots, k$, tenemos que

$$T(v_i) = v_i,$$

para todo $i = 1, 2, \cdots, k$. Por otra parte, como $\mathbb{V} = Im(T) \oplus Nu(T)$, tenemos que

$$\dim(Nu(T)) = \dim(\mathbb{V}) - \dim(Im(T)) = n - k \geq 1.$$

Sea $\{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ una base de $Nu(T)$. Entonces,

$$T(v_i) = 0_{\mathbb{V}}$$

para todo $i = k + 1, \cdots, n$.

Sea $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$ entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ (por qué?).
Por lo tanto, por definición de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\ [T(v_1)]^{\mathcal{B}}\ [T(v_2)]^{\mathcal{B}} \cdots\ [T(v_k)]^{\mathcal{B}}\ [T(v_{k+1})]^{\mathcal{B}}\ \cdots\ [T(v_n)]^{\mathcal{B}}\ ] \\
&= [\ [v_1]^{\mathcal{B}}\ [v_2]^{\mathcal{B}}\ \cdots\ [v_k]^{\mathcal{B}}\ [0_{\mathbb{V}}]^{\mathcal{B}}\ \cdots\ [0_{\mathbb{V}}]^{\mathcal{B}}\ ] \\
&= [\ e_1\ e_2\ \cdots\ e_k\ 0_{\mathbb{C}^n}\ \cdots\ 0_{\mathbb{C}^n}] \\
&= \begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times n-k} \\ 0_{n-k\times k} & 0_{n-k\times n-k} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Conclusión: Si $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es una simetría con respecto a $Nu(S - I_{\mathbb{V}})$ en la dirección $Im(S - I_{\mathbb{V}}) = Nu(S + I_{\mathbb{V}})$ (ver **Ejercicio 2.27 d)**). En ese caso, S es diagonalizable con autovalores 1 y -1. La multiplicidad algebraica y geométrica del autovalor 1 es igual a la dimensión del autoespacio $Nu(S - I_{\mathbb{V}})$ y la multiplicidad algebraica y geométrica del autovalor -1 es igual a la dimensión del autoespacio $Im(S - I_{\mathbb{V}}) = Nu(S + I_{\mathbb{V}})$.

Si $T^2 = T$, entonces T es un proyector con respecto a $Im(T)$ en la dirección $Nu(T)$ (ver **Ejercicio 2.27 a)**). En ese caso, T es diagonalizable, con autovalores 1 y 0. La multiplicidad algebraica y geométrica del autovalor 1 es igual a la dimensión del autoespacio $Im(T) = Nu(T - I_{\mathbb{V}})$ y la multiplicidad algebraica y geométrica del autovalor 0 es igual a la dimensión del autoespacio $Nu(T)$.

El siguiente ejercicio es muy similar al **Ejercicio 7** de la guía.
Ejercicio de examen: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2a-4 & 2a^2-8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 \end{bmatrix}.$$

a) Obtener todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A es diagonalizable.

b) Diagonalizar A para $a = 1$.

Dem. $a)$: Calculamos el polinomio característico de A :

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2a-4 & 2a^2-8 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2-\lambda \end{bmatrix}) \\
&= (4-\lambda)[(2-\lambda)(2a-2-\lambda) - (2a^2-8)\cdot 0] \\
&= (4-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda + 4(a-1))
\end{aligned}$$

Los autovalores de A son las raíces de su polinomio característico. Es decir, buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $p_A(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda + 4(a-1)) = 0$. En este caso, las raíces son $\lambda_1 = 4$ y

$$\lambda_{2,3} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 16(a-1)}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{(2a-4)^2}}{2} = \frac{2a \pm (2a-4)}{2} = a \pm (a-2).$$

Entonces, $\lambda_2 = 2a-2$ y $\lambda_3 = 2$.

Observar que si $2a-2 \neq 2$ y $2a-2 \neq 4$ entonces, A tiene 3 autovalores distintos y por ende es diagonalizable. Es decir si $a \neq 2$ y $a \neq 3$ entonces A es diagonalizable. Veamos qué pasa si $a = 2$ ó $a = 3$.

Si $a = 2$, entonces los autovalores de A son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_{2,3} = 2$. En este caso, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Entonces A es una matriz diagona y en ese caso (trivialmente) A es diagonalizable.

Si $a = 3$, entonces los autovalores de A son $\lambda_{1,2} = 4$ y $\lambda_3 = 2$. En este caso, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Veamos la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda_{2,3} = 4$:

$$nul(A - 4I) = nul(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Como la multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$ es 1, pero la multiplicidad algebraica de dicho autovalor es 2, entonces $m_g(\lambda = 4) < m_a(\lambda = 4)$. Por lo tanto, concluimos que en este caso A NO es diagonalizable.

En conclusión, A es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

b) : Si $a = 1$, entonces $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. En este caso, los autovalores de A son $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 2$. Calculemos los autoespacios asociados:

$$\mathcal{S}_{\lambda=4} = nul(A - 4I) = nul(\begin{bmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda=0} = nul(A) = nul(\begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda=2} = nul(A - 2I) = nul(\begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}) = nul(\begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Si tomamos $P := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\Lambda := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, entonces

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

$\square$

Formas de Jordan

Cuando una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no es diagonalizable, es necesario recurrir a lo que se denominan *formas de Jordan*. En el siguiente ejercicio, vamos a demostrar cómo son las bloques de Jordan J para el caso $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ y cómo obtener una matriz $P \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ inversible tal que

$$A = PJP^{-1}.$$

Observar que, pensando de manera similar, podemos deducir cómo sería la forma de Jordan para $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

Ejercicio 8: Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz no diagonalizable. Demostrar que existe una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP = J$, donde J tiene alguna de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq \mu$.

Dem. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es no diagonalizable, es porque tenemos alguno de los siguientes 3 casos:

1. λ es un autovalor triple de A con multiplicidad geométrica 1.
2. λ es un autovalor triple de A con multiplicidad geométrica 2.
3. λ es un autovalor doble de A con multiplicidad geométrica 1 y μ es un autovalor simple de A.

Caso 1: λ es un autovalor triple con multiplicidad geométrica 1. En este caso, vamos a tomar

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Respecto de la matriz $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$, (donde v_1, v_2, v_3 denotan sus columnas) P debe ser inversible y como queremos que $A = PJP^{-1}$, multiplicando a izquierda por P a ambos lados de la ecuación anterior, tenemos que se debe cumplir que

$$AP = PJ.$$

Por un lado, P es inversible si y sólo si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente. Por otra parte, como

$$AP = A[v_1 \ v_2 \ v_3] = [Av_1 \ Av_2 \ Av_3] \text{ y}$$

$$PJ = [v_1 \ v_2 \ v_3] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = [\lambda v_1 \ v_1 + \lambda v_2 \ v_2 + \lambda v_3].$$

Tenemos que $AP = PJ$ si y sólo si $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$ y $Av_3 = v_2 + \lambda v_3$. Es decir,

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1 \text{ y } (A - \lambda I)v_3 = v_2.$$

En resumen, la matriz P se obtiene buscando 3 vectores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes tales que v_1 es un autovector asociado a λ, $(A - \lambda I)v_2 = v_1$ y $(A - \lambda I)v_3 = v_2$.

Caso 2: λ es un autovalor triple con multiplicidad geométrica 2. En este caso, vamos a tomar

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Respecto de la matriz $P = [v_1\ v_2\ v_3]$, (donde v_1, v_2, v_3 denotan sus columnas) P debe ser inversible y se debe cumplir que $AP = PJ$. Por un lado, P es inversible si y sólo si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente. Por otra parte, como

$$AP = A[v_1\ v_2\ v_3] = [Av_1\ Av_2\ Av_3] \text{ y}$$

$$PJ = [v_1\ v_2\ v_3] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = [\lambda v_1\ v_1 + \lambda v_2\ \lambda v_3].$$

Tenemos que $AP = PJ$ si y sólo si $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$ y $Av_3 = \lambda v_3$. Es decir,

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1 \text{ y } (A - \lambda I)v_3 = 0.$$

En resumen, la matriz P se obtiene buscando 3 vectores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes tales que v_1 y v_3 son autovectores asociados a λ y $(A - \lambda I)v_2 = v_1$.

Caso 3: λ es un autovalor doble con multiplicidad geométrica 1 y μ es un autovalor simple.

En este caso, vamos a tomar

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Respecto de la matriz $P = [v_1\ v_2\ v_3]$, (donde v_1, v_2, v_3 denotan sus columnas) P debe ser inversible y se debe cumplir que $AP = PJ$. Por un lado, P es inversible si y sólo si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente. Por otra parte, como

$$AP = A[v_1\ v_2\ v_3] = [Av_1\ Av_2\ Av_3] \text{ y}$$

$$PJ = [v_1\ v_2\ v_3] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = [\lambda v_1\ v_1 + \lambda v_2\ \mu v_3].$$

Tenemos que $AP = PJ$ si y sólo si $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$ y $Av_3 = \mu v_3$. Es decir,

$$(A - \lambda I)v_1 = 0,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1 \text{ y } (A - \mu I)v_3 = 0.$$

En resumen, la matriz P se obtiene buscando 3 vectores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes tales que v_1 es un autovector asociado a λ, v_3 es un autovector asociado a μ y $(A - \lambda I)v_2 = v_1$.

$\square$

El siguiente ejercicio es un ejemplo de cálculo de la forma de Jordan de una matriz de 3×3.
Ejercicio 9: Encontrar los autovalores de la siguiente matriz, sus multiplicidades algebraicas y geométricas. En caso de que A_2 no sea diagonalizable, hallar P inversible tal que $P^{-1}A_2P = J$, donde J tiene alguna de las formas del ejercicio anterior.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dem. Calculamos el polinomio característico de A_2 :

$$\begin{aligned} p_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I) = \det(&\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}) \\ &= (2-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Los autovalores de A son las raíces de su polinomio característico. En este caso, la única raíz del polinomio característico es $\lambda_{1,2,3} = 2$. La multiplicidad algebraica del autovalor $\lambda = 2$ es entonces 3. Veamos cuál es su multiplicidad geométrica calculando el autoespacio asociado a $\lambda = 2$:

$$nul(A_2 - 2I) = nul(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}) = nul(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Por lo tanto la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 2 y A_2 no es diagonalizable. Estamos en el **Caso 2** del **Ejercicio 8**. En este caso,

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si $P := [v_1\ v_2\ v_3]$ es inversible, entonces $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ (las columnas de P) son vectores linealmente independientes tales que v_1 y v_3 son autovectores asociados a $\lambda = 2$ y $(A_2 - 2I)v_2 = v_1$.

Tomamos $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (que son vectores claramente li). Entonces, buscamos $v_2 \in \mathbb{R}^3$ linealmente independiente con v_1 y v_3 tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} v_2 = (A_2 - 2I)v_2 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, nos queda el siguiente sistema no homogéneo a resolver:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La solución de dicho sistema es:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Como sólo necesitamos un vector $v_2 \in \mathbb{R}^3$, tomamos $\alpha = \beta = 0$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que es li con v_1 y v_3 (verificarlo). Entonces $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y tenemos que

$$A_2 = PJP^{-1}.$$

□